

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

La calculatrice est autorisée

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

I - Transformation polytropique

Une transformation polytropique est une transformation d'un gaz pour laquelle il existe un coefficient $k > 0$ tel que $PV^k = cte$ tout au long de la transformation.

On considère n moles de gaz parfait qui subit une transformation polytropique entre deux états (P_0, V_0, T_0) et (P_1, V_1, T_1) . On suppose que la réaction n'est pas trop rapide afin que l'équilibre mécanique soit en permanence réalisé.

Données : pour un gaz parfait,

$$C_V = \frac{nR}{\gamma - 1} \quad C_P = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}$$

- 1) À quelles transformations connues correspondent les cas $k = 0$, $k = 1$ et $k = +\infty$?
- 2) Calculer le travail des forces de pression W en fonction d'abord des pressions et des volumes, puis dans un second temps des températures seulement.
- 3) Montrer que le transfert thermique s'écrit :
$$Q = nR \left(\frac{1}{\gamma - 1} - \frac{1}{k - 1} \right) (T_1 - T_0)$$
- 4) Analyser les cas $k = 0$, $k = 1$ et $k = +\infty$, et vérifier la cohérence avec l'analyse initiale.
- 5) À quel type de transformation correspond le cas $k = \gamma$?

-----Fin de la partie I -----

II - Cycle de Lenoir

Cycle de Lenoir Le cycle de Lenoir (1860) est associé au premier moteur à combustion interne à deux temps :

- 1er temps : admission du mélange (combustible + air), combustion, détente ;
- 2ème temps : échappement (évacuation des produits de la combustion).

On modélise ce cycle réel de la façon ci-dessous. De l'air (n moles, gaz supposé parfait, coefficient de Laplace $\gamma = 1,4$) subit le cycle suivant au contact de deux sources de température $T_f = 300$ K et $T_c = 600$ K. On suppose toutes les transformations mécaniquement réversibles.

- 1 → 2 : échauffement isochore jusqu'à T_c , au contact de la source chaude.
- 2 → 3 : détente isotherme au contact de la source chaude.
- 3 → 1 : refroidissement isobare au contact de la source froide.

Initialement, l'air est dans l'état $P_1 = 1,00$ bar, $T_1 = T_f$ et $V_1 = 1,00$ L. On donne $R = 8,314$ J · K⁻¹ · mol⁻¹.

- 6) Que vaut la variation de l'énergie interne du gaz sur un cycle ΔU_{cycle} ?
- 7) Donner l'allure du cycle dans le diagramme de Clapeyron. S'agit-il d'un cycle moteur ou récepteur ? Justifier graphiquement à l'aide de l'aire algébrique du cycle.
- 8) Déterminer la valeur numérique de (P, T, V) pour les états 2 et 3.
- 9) Déterminer l'expression du travail des forces de pression et du transfert thermique reçus par le gaz au cours de chaque étape en fonction de n , γ et des (P, V, T) de chaque état. Faire les applications numériques.

On définit le rendement de la machine :

$$\eta = \left| \frac{W_{cycle}}{Q_c} \right|$$

où W_{cycle} est le travail des forces de pression sur un cycle et Q_c la chaleur reçue de la part de la source chaude.

- 10) Calculer numériquement le rendement.

-----Fin de la partie II -----

III - Neige artificielle

La neige artificielle est obtenue en pulvérisant de fines gouttes d'eau liquide supposées sphériques de rayon $R = 0,2 \text{ mm}$ (de surface notée S) à $T_i = 10 \text{ °C}$ dans l'air ambiant à la température $T_e = -15 \text{ °C}$.

À l'interface goutte-air, la goutte de température homogène $T(t)$ reçoit une puissance thermique en provenance de l'air égale à (avec h une constante) :

$$\mathcal{P}_{th} = -hS(T(t) - T_e)$$

Données thermodynamiques :

- Coefficient conducto-convectif $h = 65 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
- Chaleur latente de fusion $\ell_{fus} = 333 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
- Capacité thermique massique de l'eau liquide $c_\ell = 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- Masse volumique de l'eau liquide $\rho = 1,0 \text{ kg} \cdot \text{L}^{-1}$

11) Commenter le signe de \mathcal{P}_{th} .

12) On suppose que la goutte reste liquide. Appliquer le premier principe infinitésimal à la goutte et en déduire que de sa température $T(t)$ vérifie l'équation :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \frac{T_e}{\tau}$$

où τ est à exprimer en fonction de ρ , c_ℓ , R et h .

On suppose que la goutte peut être dans un état surfondu, ie. que l'eau peut rester liquide à des températures inférieures à la température de fusion.

13) Déterminer le temps t_0 mis par la goutte d'eau liquide pour atteindre la température de surfusion $T_{surf} = -5 \text{ °C}$.

14) Lorsque la goutte a atteint la température T_{surf} , il y a rupture de la surfusion : la température remonte brutalement à $T_{fus} = 0 \text{ °C}$ et la goutte est partiellement solidifiée (phénomène également brutal). Moyennant des hypothèses que vous explicitez, calculer la fraction x_ℓ de liquide restant à solidifier après la rupture de la surfusion.

15) Déterminer le temps nécessaire à la solidification du reste de l'eau liquide.

-----Fin de la partie III -----

IV - Raie HI à 21 cm de l'atome d'hydrogène

Un atome d'hydrogène dans son état fondamental peut absorber un rayonnement électromagnétique de longueur d'onde $\lambda = 21 \text{ cm}$, c'est ce que l'on appelle usuellement la raie HI à 21 cm. Dans cet exercice, nous allons voir si un modèle semi-classique de l'atome permet de comprendre l'origine de cette raie.

Données :

- Charge de l'électron $e = -1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- Masse de l'électron $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
- Constante de Planck réduite $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
- Vitesse de la lumière $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- Permittivité diélectrique du vide $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$

IV.1 - Étude classique de l'atome d'hydrogène

L'étude qui suit sera menée dans le référentiel \mathcal{R} centré sur le proton, supposé galiléen. On désignera par r la distance entre le proton et l'électron et le moment cinétique de l'électron par rapport à l'origine dans le référentiel \mathcal{R} sera noté \vec{L} .

16) Rappeler l'expression de la force électrostatique \vec{F} s'exerçant sur l'électron.

17) Déterminer l'expression de l'énergie potentielle électrostatique \mathcal{E}_p de l'électron, en choisissant le zéro de cette énergie potentielle quand $r \rightarrow \infty$.

18) Montrer que le mouvement de l'électron est plan.

19) Déterminer l'énergie mécanique \mathcal{E}_m de l'électron et la mettre sous la forme

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,eff}(r)$$

où $\mathcal{E}_{p,eff}(r)$ est une fonction de r à expliciter en fonction de ϵ_0 , m , e , r et L (norme du vecteur \vec{L}).

20) Donner l'allure de la représentation graphique de $\mathcal{E}_{p,eff}(r)$ d'une part dans le cas où $L = 0$, d'autre part dans le cas où $L \neq 0$.

21) Dessiner une trajectoire de l'électron si $L = 0$.

22) Dans le cas où $L \neq 0$, analyser qualitativement le comportement du système pour différentes valeurs de l'énergie mécanique \mathcal{E}_m . Déterminer le rayon r_0 de l'orbite circulaire et l'énergie mécanique \mathcal{E}_0 de l'électron décrivant une telle orbite en fonction de L , e , m et ε_0 .

IV.2 - Le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

En 1913 Niels Bohr proposa un modèle « semi-classique » de l'atome d'hydrogène, dans ce modèle l'électron se trouve sur une orbite circulaire de rayon r et son moment cinétique orbital L est quantifié par $L = n\hbar$ où $n \in \mathbb{N}^*$ est un nombre entier strictement positif et \hbar la constante de Planck réduite.

23) Montrer que les orbites (rayons notés r_n) sont quantifiées. Déterminer la valeur du rayon r_1 (en pm = 10^{-12} m) de la première orbite de Bohr.

24) Donner la vitesse v_n de l'électron sur l'orbite caractérisée par l'entier n . Donner la valeur numérique de v_1 . Le mouvement de l'électron vous semble-t-il relativiste ? Justifier.

25) En déduire que les niveaux d'énergie (énergies notées \mathcal{E}_n) sont quantifiés. Donner la valeur en eV (électron-volt) de l'énergie de l'état fondamental.

On rappelle que l'énergie d'agitation thermique d'un atome vaut :

$$\mathcal{E}_{th} = \frac{3}{2} k_B T$$

26) À quelle température l'énergie d'agitation thermique d'un atome d'hydrogène est-elle comparable (en valeur absolue) à son énergie d'ionisation ? Commenter.

27) L'atome d'hydrogène dans son état fondamental est susceptible d'absorber ou d'émettre un rayonnement de longueur d'onde proche de $\lambda = 21$ cm. Le modèle de Bohr permet-il de comprendre l'origine de cette transition ?

-----Fin de la partie IV -----

V - Anneau avec ressort

Un point matériel de masse m , repéré par le point M est libre de glisser sans frottement sur un cerceau vertical de rayon R et de centre O dans le champ de

pesanteur terrestre. Le point M est accroché à l'extrémité d'un ressort de longueur ℓ , de constante de raideur k et de longueur à vide nulle.

28) Montrer que :

$$\ell^2 = 2R^2 (1 + \cos(\theta))$$

29) Déterminer l'énergie potentielle \mathcal{E}_p totale du système, en fonction de m , g , k , ℓ_0 et θ . On choisira la constante afin que $\mathcal{E}_p(\theta = \frac{\pi}{2}) = 0$.

30) En déduire les positions d'équilibre et déterminer de leur stabilité.

On fait désormais tourner l'anneau sur lui-même

On se place dans le référentiel \mathcal{R} de l'anneau, non galiléen car il tourne à la vitesse angulaire ω par rapport au référentiel terrestre galiléen. On admet que tous les résultats de la mécanique restent valables à condition de rajouter une nouvelle force, appelée force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{F}_{ie} = m\omega^2 x \vec{u}_x$$

31) Déterminer l'énergie potentielle associée à la force d'inertie d'entraînement, en fonction de m , ω , R et θ .

32) Déterminer les expressions des nouvelles positions d'équilibre.

-----Fin de la partie V -----

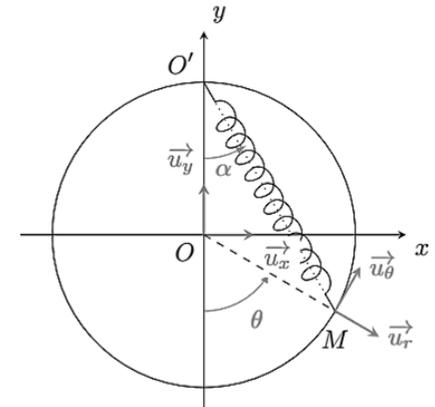
VI - Autours des satellites

VI.1 - Orbites circulaires et elliptiques

On suppose qu'un satellite S de masse m en orbite autour d'un astre de masse M , supposé fixe au centre O d'un référentiel \mathcal{R} galiléen.

33) Montrer que le moment cinétique \vec{L}_O du satellite est constant.

On suppose que S décrit un mouvement circulaire de rayon R et de vitesse angulaire ω autour de O. On note v_0 la norme de la vitesse.



34) Établir l'expression v_0 , en fonction de R , G et M .

35) En déduire une relation entre ω , R , G et M . Quel est le nom de la loi associée à cette relation ?

On considère désormais que le satellite (S) a une trajectoire elliptique. On donne l'équation polaire d'une ellipse :

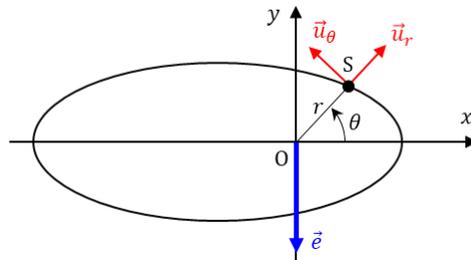
$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)}$$

où $p > 0$ le paramètre de l'ellipse et $e \in [0 ; 1]$ son excentricité.

Nous allons étudier le mouvement de S à l'aide du vecteur excentricité, défini par :

$$\vec{e} = -\frac{L}{GmM} \vec{v} + \vec{u}_\theta$$

où \vec{v} est la vitesse du satellite et $L = \|\vec{L}_O\|$. Le vecteur excentricité \vec{e} est un vecteur orthogonal au demi-grand axe de l'ellipse (voir figure ci-contre).



36) Montrer que \vec{e} est constant.

37) Calculer le produit scalaire $\vec{e} \cdot \vec{u}_\theta$ de deux manières différentes : d'une part à l'aide de e (module de \vec{e}) et θ , et d'autre part en s'aidant de l'expression de \vec{e} . En déduire que : $r(\theta)$ vérifie l'équation de l'ellipse donnée ci-dessus, où p est à exprimer en fonction de G , m , M et L .

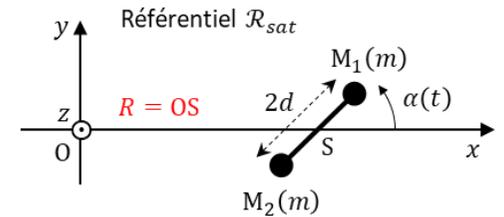
38) Que vaut e pour un mouvement circulaire ? Que se passe-t-il lorsque $e \rightarrow 1$?

VI.2 - Stabilisation du satellite par gradient de gravité

La méthode de stabilisation par gradient de gravité a été mise en œuvre pour les satellites artificiels afin qu'ils présentent vers la Terre toujours le même côté. Elle ne requiert aucune ressource d'énergie embarquée. Le principe de cette méthode a été établi par Lagrange, au XVII^{ème}, afin d'expliquer pourquoi la Lune présente toujours la même face vers la Terre.

On considère un satellite constitué de deux points matériels M_1 et M_2 de masses identiques m et reliés par une tige rigide de masse négligeable et de longueur $2d$. Le barycentre S du satellite décrit autour de O (de masse M) une orbite circulaire de rayon R (avec $R \gg d$) à la vitesse angulaire ω . On se place dans le référentiel du satellite \mathcal{R}_{sat} , non galiléen.

Dans ce référentiel, le point S est immobile, et les masses M_1 et M_2 peuvent tourner dans le plan orbital, autour de S. Tous les théorèmes de mécanique restent valables, en considérant que les points M_i ($i = 1$ ou 2) subissent trois forces :



- force d'interaction gravitationnelle de O : $\vec{F}_g(M_i)$
- force d'inertie d'entraînement : $\vec{F}_{ie}(M_i) = m\omega^2 \overline{OM}_i$
- force d'inertie de Coriolis : $\vec{F}_{ic}(M_i) = 2m\omega\dot{\alpha} \overline{SM}_i$

39) Déterminer dans \mathcal{R}_{sat} le moment cinétique par rapport au point S du satellite $\{M_1 + M_2\}$, noté \vec{L}_S .

40) Montrer que le moment des forces de Coriolis par rapport au point S est nul.

On admet qu'un développement limité permet de montrer que :

$$\overline{OM}_1 \simeq [R + d \cos(\alpha)] \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \overline{OM}_2 \simeq [R - d \cos(\alpha)] \vec{u}_x$$

41) En vous aidant du développement limité précédent, montrer qu'au premier ordre en $d \ll R$, on a :

$$\begin{aligned} \vec{F}_g(M_1) + \vec{F}_{ie}(M_1) &= 3m\omega^2 d \cos(\alpha) \vec{u}_x \\ \vec{F}_g(M_2) + \vec{F}_{ie}(M_2) &= -3m\omega^2 d \cos(\alpha) \vec{u}_x \end{aligned}$$

42) Établir que dans \mathcal{R}_{sat} le moment résultant par rapport au point S de l'ensemble des forces extérieures vaut :

$$\vec{\Gamma}_S = -6m\omega^2 d^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \vec{u}_z$$

43) Appliquer le théorème du moment cinétique au satellite dans \mathcal{R}_{sat} . Montrer que l'équation différentielle du mouvement vaut :

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) = 0$$

où ω_0 est à exprimer en fonction des paramètres du problème.

44) Déterminer les valeurs de α qui correspondent à une position d'équilibre et déterminer leur stabilité.

-----Fin de la partie VI -----

I - Transformation polytropique

1) Si $k = 0$, $P = cte$ donc **isobare**. Si $k = 1$, $PV = nRT = cte$ donc **isotherme**. Si $k = +\infty$, alors V ne peut pas varier, sinon PV^k ne serait pas constant, donc **isochore**.

2) On a équilibre mécanique, donc $P_{ext} = P$. On a $PV^k = cte$. Ainsi,

$$W = - \int_{V_0}^{V_1} P dV = - \int_{V_0}^{V_1} cte \cdot \frac{dV}{V^k} = - cte \cdot \left[\frac{V^{1-k}}{1-k} \right]_{V_0}^{V_1} = - cte \cdot \left(\frac{V_1^{1-k}}{1-k} - \frac{V_0^{1-k}}{1-k} \right)$$

Or, $cte = P_0 V_0^k$ d'une part mais aussi $cte = P_1 V_1^k$ car constant sur toute la transformation (donc en particulier aux EI et EF).

$$W = \frac{P_1 V_1 - P_0 V_0}{k-1} = \frac{nR}{k-1} (T_1 - T_0)$$

3) Le premier principe + la loi de Joule donnent :

$$\Delta U = \frac{nR}{\gamma-1} (T_1 - T_0) = W + Q \Rightarrow Q = nR \left(\frac{1}{\gamma-1} - \frac{1}{k-1} \right) (T_1 - T_0)$$

4) Si $k = 0$, $Q = \frac{\gamma nR}{\gamma-1} \Delta T = C_p \Delta T = \Delta H$ donc c'est bien **isobare** (PP enthalpique).

Si $k = 1$, T_1 doit être égal à T_0 afin de Q ne diverge pas, donc c'est bien **isotherme**.

Si $k = +\infty$, $Q = \frac{nR}{\gamma-1} \Delta T = C_v \Delta T = \Delta U$ donc c'est bien **isochore** (PP).

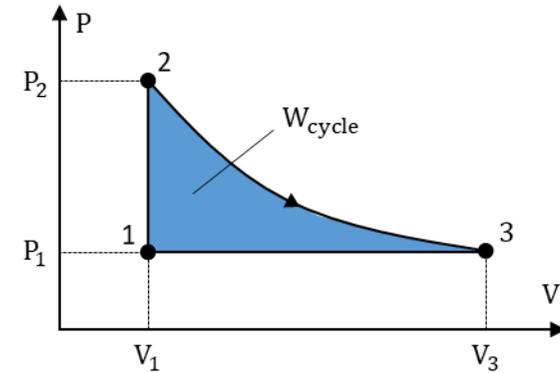
5) Si $k = \gamma$, $Q = 0$ donc la transformation est **adiabatique**.

-----Fin de la partie I -----

II - Cycle de Lenoir

6) $\Delta U_{cycle} = 0$ car U est une fonction d'état.

7) Cycle moteur car $W < 0$ (cycle sens horaire, cf. démo cours).



8)

	P	T	V
1	$P_1 = 1,00 \text{ bar}$	$T_1 = 300 \text{ K}$	$V_1 = 1,00 \text{ L}$
2	$P_2 = 2P_1 = 2,00 \text{ bar}$	$T_2 = T_c = 600 \text{ K}$	$V_2 = V_1 = 1,00 \text{ L}$
3	$P_3 = P_1 = 1,00 \text{ bar}$	$T_3 = T_c = 600 \text{ K}$	$V_3 = 2V_1 = 2,00 \text{ L}$

9)

	W	Q
1 → 2	$W_{12} = 0$	$Q_{12} = C_v(T_2 - T_1) = 250 \text{ J}$
2 → 3	$W_{23} = -nRT_c \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right) = -139 \text{ J}$	$Q_{23} = -W_{23} = 139 \text{ J}$
3 → 1	$W_{31} = P_1(V_3 - V_1) = 100 \text{ J}$	$Q_{31} = C_p(T_1 - T_3) = -350 \text{ J}$

10) On a :

$$\eta = \left| \frac{W_{cycle}}{Q_c} \right| = \left| \frac{W_{12} + W_{23} + W_{31}}{Q_{12} + Q_{23}} \right| = 10,0 \%$$

-----Fin de la partie II -----

III - Neige artificielle

11) Puisque $T(t) > T_e$, on a $\mathcal{P}_{th} < 0$.

La puissance thermique reçue est négative, cela signifie que la goutte (plus chaude) cède de l'énergie à l'air (plus froid). Logique, le flux de chaleur du fait du chaud au froid.

12) Le PP enthalpique (transformation dans l'atmosphère, donc monobare) :

$$dH = mc_\ell dT = -hS(T(t) - T_e) dt$$

Or, pour une goutte, $S = 4\pi R^2$ et $m = \rho_\ell \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$. On en déduit :

$$\rho_\ell \frac{4}{3}\pi R^3 c_\ell dT = -h4\pi R^2(T(t) - T_e)$$

Ainsi,

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \frac{T_e}{\tau} \quad \text{avec : } \tau = \frac{R\rho_\ell c_\ell}{3h}$$

13) Solution de l'ED :

$$T(t) = T_e + (T_i - T_e) e^{-t/\tau}$$

On en déduit :

$$t_0 = \tau \ln\left(\frac{T_e - T_i}{T_e - T_{surf}}\right) = 3,9 \text{ s}$$

14) La transformation est brutale, on peut donc négliger les échanges de chaleur. Transformation : (1) faire passer l'eau de -5°C à 0°C puis (2) solidifier une fraction $(1 - x_\ell)$ d'eau.

Le PP enthalpique donne (avec $Q = 0$) :

$$\begin{aligned} \Delta H = 0 = \Delta H_1 + \Delta H_2 &\Rightarrow 0 = mc_\ell (T_{fus} - T_{surf}) - (1 - x_\ell)m \ell_{fus} \\ &\Rightarrow x_\ell = 1 - \frac{c_\ell}{\ell_{fus}} (T_{fus} - T_{surf}) = 94 \% \end{aligned}$$

15) On applique le PP enthalpique entre l'état précédent et l'état où toute la goutte s'est solidifiée :

$$\Delta H = -x_\ell m \ell_{fus} = -hS(T_{fus} - T_e) \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{x_\ell \rho R \ell_{fus}}{3h(T_{fus} - T_e)} = 21 \text{ s}$$

-----Fin de la partie III -----

IV - Raie HI à 21 cm de l'atome d'hydrogène

IV.1 - Étude classique de l'atome d'hydrogène

16) Force électrostatique s'exerçant sur l'électron :

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \vec{e}_r$$

17) Energie potentielle électrostatique :

$$-\frac{d\mathcal{E}_p}{dt} \vec{e}_r = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \vec{e}_r \Rightarrow \mathcal{E}_p = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} + cte$$

La constante d'intégration est choisie nulle pour satisfaire la condition de l'énoncé.

$$\mathcal{E}_p = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

18) D'après le TMC :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_O = cte = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$$

Donc \vec{OM} est orthogonal à un vecteur constant. Donc est toujours dans le plan orthogonal à \vec{L}_O et passant par O.

19) Énergie mécanique :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

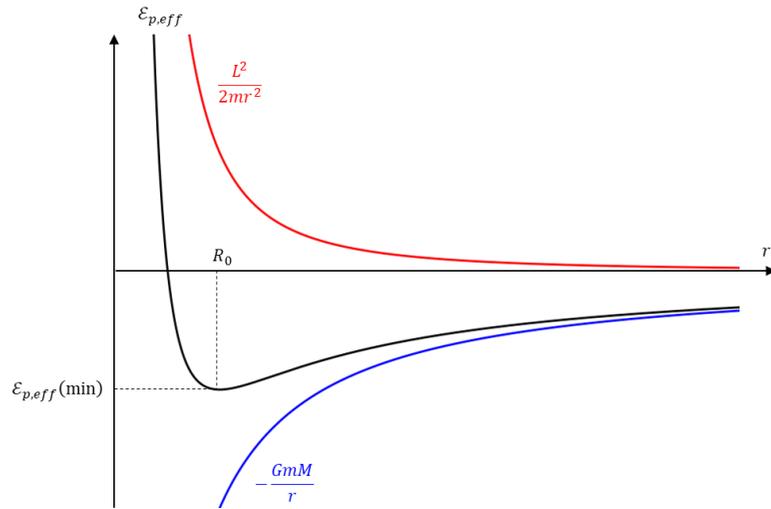
Or,

$$\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 = \frac{L^2}{2mr^2}$$

Ainsi,

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}}_{\mathcal{E}_{p,eff}(r)}$$

20) Courbe bleu (bas) si $L = 0$. Courbe noire (milieu) si $L \neq 0$.



21) Si $L = 0$, alors $\dot{\theta} = 0$, donc $\theta = cte$. L'électron tombe donc en ligne droite sur le noyau.

22) Si $\mathcal{E}_m > 0$ hyperbole. Si $\mathcal{E}_m = 0$ parabole. Si $\mathcal{E}_m < 0$ ellipse. Si $\mathcal{E}_m = \min(\mathcal{E}_{p,eff})$ cercle.

Cherchons le minimum de $\mathcal{E}_{p,eff}$.

$$\frac{d\mathcal{E}_{p,eff}}{dr} = 0 = -\frac{L}{mr_0^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_0^2} \Rightarrow \boxed{r_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 L^2}{me^2}}$$

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_{p,eff}(r_0) = \frac{L^2}{2mr_0^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_0} = \boxed{-\frac{m}{2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 L} \right)^2}$$

IV.2 - Le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

23) On vient de calculer le rayon d'une orbite circulaire :

$$\boxed{r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 (n\hbar)^2}{me^2} = n^2 r_1}$$

Les orbites sont quantifiées. AN.

$$\boxed{r_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} = 53 \text{ pm}}$$

24) Sur une orbite circulaire uniforme, le moment cinétique vaut :

$$L_n = mr_n v_n \Rightarrow \boxed{v_n = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 n\hbar} = \frac{v_1}{n}}$$

AN.

$$\boxed{v_1 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar} = 3,47 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \ll c}$$

L'électron n'est pas relativiste.

25) On a déterminé l'énergie d'une orbite circulaire :

$$\boxed{\mathcal{E}_n = -\frac{m}{2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 n\hbar} \right)^2 = \frac{\mathcal{E}_1}{n^2}}$$

Les niveaux d'énergie sont quantifiés.

AN.

$$\boxed{\mathcal{E}_1 = -\frac{m}{2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar} \right)^2 = -13,6 \text{ eV}}$$

26) L'énergie d'ionisation et l'énergie nécessaire pour arracher un électron. Ici, il y a un seul électron, il est donc dans l'état de plus basse énergie.

$$\mathcal{E}_{th} = \frac{3}{2} k_B T = |\mathcal{E}_1| \Rightarrow \boxed{T = \frac{2|\mathcal{E}_1|}{3k_B} = 1,05 \cdot 10^5 \text{ K}}$$

C'est la température nécessaire pour faire un plasma d'hydrogène. On retrouve cette température environ à mi-chemin entre le centre et la surface du soleil.

27) L'atome d'hydrogène dans son état fondamental est susceptible d'absorber ou d'émettre un rayonnement de longueur d'onde comprise entre $\lambda_{1 \rightarrow \infty}$ et $\lambda_{1 \rightarrow 2}$ telles que :

$$|\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1| = |\mathcal{E}_1| \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3|\mathcal{E}_1|}{4} = \frac{hc}{\lambda_{12}} \Rightarrow \boxed{\lambda_{12} = \frac{4hc}{3|\mathcal{E}_1|} = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ cm}}$$

$$|\mathcal{E}_\infty - \mathcal{E}_1| = |\mathcal{E}_1| \left(\frac{1}{1^2} - 0 \right) = |\mathcal{E}_1| = \frac{hc}{\lambda_{1\infty}} \Rightarrow \boxed{\lambda_{1\infty} = \frac{hc}{|\mathcal{E}_1|} = 9,1 \cdot 10^{-6} \text{ cm}}$$

La valeur de $\lambda_0 = 21$ cm est en dehors de ce domaine : le modèle de Bohr ne permet, donc, pas de comprendre l'origine de la transition.

-----Fin de la partie IV -----

V - Anneau avec ressort

28) D'après Pythagore :

$$\ell^2 = (R + R \cos(\theta))^2 + (R \sin(\theta))^2 = \boxed{2R^2 (1 + \cos(\theta))}$$

29) On doit prendre en compte l'énergie potentielle de pesanteur et l'énergie potentielle élastique. Ainsi :

$$\mathcal{E}_p = -mgR \cos(\theta) + kR^2(1 + \cos(\theta)) + cte$$

Avec la condition imposée par l'énoncé :

$$\boxed{\mathcal{E}_p = (kR^2 - mgR) \cos(\theta)}$$

30) Calculons les dérivées premières et secondes :

$$\mathcal{E}'_p = (mgR - kR^2) \sin(\theta) \quad \mathcal{E}''_p = (mgR - kR^2) \cos(\theta)$$

Position d'équilibre : $\mathcal{E}'_p(\theta_{eq}) = 0$, donc $\theta_{eq} = 0$ et π .

Stabilité donnée par le signe de $\mathcal{E}''_p(\theta_{eq})$. On en déduit que $\theta_{eq} = 0$ est stable et $\theta_{eq} = \pi$ instable si $mgR > kR^2$. C'est l'inverse si $mgR < kR^2$.

31) On primitive par rapport à x :

$$\boxed{\mathcal{E}_{p,ie} = -\frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = -\frac{1}{2}m\omega^2 R^2 \sin^2(\theta)}$$

32) On a donc :

$$\mathcal{E}'_p = (mgR - kR^2) \sin(\theta) - m\omega^2 R^2 \sin(\theta) \cos(\theta)$$

Les positions d'équilibres sont :

$$[1] \sin(\theta) = 0 \quad \text{et} \quad [2] \cos(\theta) = \frac{mgR - kR^2}{m\omega^2 R^2}$$

La position [1] existe toujours. La condition [2] existe à condition que le rapport soit < 1 en valeur absolue.

-----Fin de la partie V -----

VI - Autours des satellites

VI.1 - Orbites circulaires et elliptiques

33) D'après le TMC appliqué au satellite dans le référentiel \mathcal{R} :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OS} \wedge \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{L}_O = cte}$$

34) On rappelle que $L = cte = mRv_0$. Le mouvement est donc uniforme ($v_0 = 0$). On a ainsi :

$$\vec{v} = v_0 \vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{a} = -\frac{v_0^2}{R_0} \vec{u}_r$$

Le PFD appliqué au satellite dans le référentiel \mathcal{R} donne :

$$-m \frac{v_0^2}{R} \vec{u}_r = -G \frac{mM}{R^2} \vec{u}_r \Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}}}$$

35) On a :

$$v_0 = R\omega = \sqrt{\frac{GM}{R}} \Rightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{GM}{R^3}}$$

Il s'agit de la troisième loi de Kepler.

36) Calculons la dérivée du vecteur excentricité :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{e}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(-\frac{L}{GmM} \vec{v} + \vec{u}_\theta \right) && \rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} \\ &= -\frac{L}{GmM} \vec{a} - \dot{\theta} \vec{u}_r && \rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = -G \frac{M}{r^2} \vec{u}_r \\ &= -\frac{mr^2 \dot{\theta}}{GmM} \times \left(-G \frac{M}{r^2} \vec{u}_r \right) - \dot{\theta} \vec{u}_r = \boxed{\vec{0}} && \text{et } L = mr^2 \dot{\theta} \end{aligned}$$

Donc \vec{e} est bien un vecteur constant.

37) D'une part, on peut voir graphiquement que : $\vec{e} \cdot \vec{u}_\theta = -e \cos(\theta)$. D'autre part :

$$\begin{aligned}\vec{e} \cdot \vec{u}_\theta &= -\frac{L}{GmM} (\dot{r} \vec{u}_r + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta) \cdot \vec{u}_\theta + \vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_\theta \\ &= -\frac{L r \dot{\theta}}{GmM} + 1 \\ &= -\frac{L^2}{Gm^2 M r} + 1\end{aligned}$$

On en déduit :

$$-e \cos(\theta) = -\frac{L^2}{Gm^2 M r} + 1 \Rightarrow \boxed{r = \frac{L^2 / Gm^2 M}{1 + e \cos(\theta)} = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)}}$$

avec : $\boxed{p = \frac{L^2}{Gm^2 M}}$

38) Dans le cas du mouvement circulaire, r ne dépend pas de θ . Donc $\boxed{e = 0}$. L'excentricité est nulle. Si $e \rightarrow 1$, alors $r(\pi) \rightarrow +\infty$. On tend vers une parabole (ellipse de demi-grand axe infini).

VI.2 - Stabilisation du satellite par gradient de gravité

39) Le satellite est composé de deux points matériels. Ainsi :

$$\vec{L}_S = \overrightarrow{SM_1} \wedge m\vec{v}_1 + \overrightarrow{SM_2} \wedge m\vec{v}_2 = md^2 \dot{\alpha} \vec{u}_z + md^2 \dot{\alpha} \vec{u}_z = \boxed{2md^2 \dot{\alpha} \vec{u}_z}$$

40) Par définition :

$$\vec{M}_S(\vec{F}_{ic}(M_1)) = \overrightarrow{SM_1} \wedge 2m\omega_0 \dot{\alpha} \overrightarrow{SM_1} = \boxed{\vec{0}}$$

Il en va de même pour $\vec{M}_S(\vec{F}_{ic}(M_2))$.

41) On a :

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{g1}(M_1) + \vec{F}_{ie}(M_1) = \left(-G \frac{mM}{(OM_1)^3} + m\omega^2\right) \overrightarrow{OM_1}$$

Or, $GM = \omega^2 R^3$. Ainsi,

$$\vec{F}_1 = m\omega^2 \left(1 - \left(\frac{R}{OM_1}\right)^3\right) \overrightarrow{OM_1}$$

Or,

$$\left(\frac{R}{OM_1}\right)^3 = \left(1 + \frac{d}{R} \cos(\alpha)\right)^{-3} \simeq 1 - 3 \frac{d}{R} \cos(\alpha)$$

Ainsi,

$$\vec{F}_1 \simeq m\omega^2 \cdot 3 \frac{d}{R} \cos(\alpha) \cdot [R + d \cos(\alpha)] \vec{u}_x$$

En gardant que le terme d'ordre 1 (pas celui de d^2), il vient :

$$\boxed{\vec{F}_1 \simeq 3m\omega^2 d \cos(\alpha) \vec{u}_x}$$

Le même raisonnement aboutit à l'autre expression demandée.

42) On en déduit le moment résultant sur M_1 :

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}_S(M_1) &= \overrightarrow{SM_1} \wedge \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_{ie}(M_1) + \underbrace{\vec{F}_{ic}(M_1)}_{=\vec{0}}\right) \simeq \overrightarrow{SM_1} \wedge 3GmM \frac{d}{R_0^3} \cos(\alpha) \vec{u}_x \\ &= \boxed{-3GmM \frac{d^2}{R_0^3} \cos(\alpha) \sin(\alpha) \vec{u}_z}\end{aligned}$$

De même avec M_2 :

$$\vec{\Gamma}_S(M_2) = \boxed{-3GmM \frac{d^2}{R_0^3} \cos(\alpha) \sin(\alpha) \vec{u}_z}$$

On en déduit le moment résultant sur le satellite :

$$\boxed{\vec{\Gamma}_S = \vec{\Gamma}_S(M_1) + \vec{\Gamma}_S(M_2) = -6GmM \frac{d^2}{R_0^3} \cos(\alpha) \sin(\alpha) \vec{u}_z}$$

43) On applique le théorème du moment cinétique au satellite dans \mathcal{R}_{sat} .

$$\frac{d\vec{L}_S}{dt} = 2md^2 \ddot{\alpha} \vec{u}_z = -6GmM \frac{d^2}{R_0^3} \cos(\alpha) \sin(\alpha) \vec{u}_z$$

On en déduit :

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) = 0 \quad \text{avec :} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{3GM}{R_0^3}}$$

44) Les positions d'équilibre ($\ddot{\alpha} = 0$) sont données par $\sin(\alpha) = 0$ ou $\cos(\alpha) = 0$.

Donc : $\alpha_{eq} = 0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \pi$.

Considérons à présent une petite variation autour de ces positions d'équilibre $\alpha = \alpha_{eq} + \varepsilon$ (avec $\varepsilon \ll 1$ rad) et regardons si l'ED est celle d'un OH ou non.

α_{eq}	ED à l'ordre 1	OH ?	Stable ?
0	$\ddot{\varepsilon} + \omega_0^2 \varepsilon = 0$	Oui	Oui
$\pi/2$	$\ddot{\varepsilon} - \omega_0^2 \varepsilon = 0$	Non	Non
$-\pi/2$	$\ddot{\varepsilon} - \omega_0^2 \varepsilon = 0$	Non	Non
π	$\ddot{\varepsilon} + \omega_0^2 \varepsilon = 0$	Oui	Oui

-----Fin de la partie VI -----